Quelques exercices

Exercice 1

On place des nombres tous différents dans les cases d'un tableau n fois n. On a souligné le plus petit des nombres dans chaque rangée, et il s'est trouvé que tous les nombres soulignés appartenaient à des colonnes différentes. Puis, le plus petit des nombres de chaque colonne a été souligné, et il s'est trouvé que tous les nombres soulignés appartenaient à des lignes différentes. Montrer que les nombres soulignés les deux fois étaient les mêmes.

Exercice 2

Les entiers positifs a, b, c, d sont tels que leur plus petit commun multiple est égal à $a+b+c+d$. Montrer que $abcd$ est divisible par 3 ou par 5 (ou les deux).

Exercice 3

Un poids de 11111 grammes est placé sur le plateau droit d'une balance. Quelqu'un place des poids sur les deux plateaux de la balance : le premier poids est de 1 gramme, et chaque poids successif est deux fois plus lourd que le précédent. À un moment, les deux plateaux sont en équilibre. Ou a été placé le poids de 16 grammes (à gauche ou à droite ?)

Exercice 4

Trouver toutes les solutions réelles de l'équation

$$(x+1)^{21} + (x+1)^{20}(x-1) + (x+1)^{19}(x-1)^2 + \cdots + (x-1)^{21} = 0.$$

Exercice 5

Soient un cercle et un point A à l'intérieur de ce cercle. Considérons tous les rectangles $ABCD$ tels que B et D soient des points du cercle. Trouver l'ensemble des points C qu'on obtient ainsi.

Exercice 6

Quel est le plus grand nombre de cavaliers qu'on peut mettre sur un échiquier 5×5 de telle sorte que chaque cavalier en ait exactement deux autres en prise ? (Dessinez la disposition des cavaliers et montrez qu'on ne peut pas en mettre plus.)

Exercice 7

Dans un trapèze $ABCD$ d'aire 1 le rapport des longueurs des bases BC/AD fait $1/2$. Soit K le milieu de la diagonale AC. Soit L le point d'intersection de la droite DK avec le côté AB. Trouver l'aire du quadrilatère $BCKL$.

Exercice 8

Soient deux entiers naturels non nuls a et b. Montrer que si $\text{PPCM}(a, a+5) = \text{PPCM}(b, b+5)$, alors $a = b$.

Exercice 9

On trace toutes les diagonales d'un 25-gone régulier. Démontrer qu'il n'y a pas 9 diagonales qui passent par un même point intérieur du 25-gone.

Exercice 10

Le carré d'un nombre entier est de la forme $\ldots 09$ (se termine par les chiffres 0 et 9). Montrer que le troisième chiffre en partant de la droite est pair.

Exercice 11

Les trois angles du triangle ABC sont aigus. A' et C' sont des points quelconques sur les côtés BC et AB respectivement. B' est le milieu du côté AC. Montrer que l'aire de $A'B'C'$ fait au plus la moitié de l'aire de ABC. Montrer que l'aire de $A'B'C'$ fait un quart de l'aire de ABC si et seulement si un des points A', C' est le milieu du côté correspondant.

Exercice 12

On considère trois entiers a, b, c vérifiant $a+b+c = 0$. On associe à ce triplet le nombre $d = a^{1999} + b^{1999} + c^{1999}$. Peut-il arriver que $d = 2$? Peut-il arriver que d soit un nombre premier ? (Un nombre premier est un nombre entier strictement plus grand que 1 qui n'a pas de diviseurs autres que 1 et lui-même. Les premiers nombres premiers sont $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$.)

Exercice 13

Une tour, en avançant d'une case par coup (verticalement ou horizontalement), a parcouru en 64 coups les cases de l'échiquier 8×8 et est revenue sur la case de départ. Montrer que le nombre de coups horizontaux est différent du nombre de coups verticaux.

Exercice 14

Sur un tableau sont écrits des entiers strictement positifs $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Sur un deuxième tableau on écrit les nombres suivants : $b_0 =$ le nombre de nombres sur le premier tableau ; $b_1 =$ le nombre de nombres du premier tableau qui sont strictement supérieurs à 1 ; $b_2 =$ le nombre de nombres du premier tableau qui sont strictement supérieurs à 2, etc. On continue tant que les b_i sont strictements positifs, on n'écrit pas de zéros. Ensuite on écrit sur un troisième tableau les nombres $c_0, c_1, \ldots$ obtenus par le même procédé à partir des nombres du deuxième tableau. Montrer que l'ensemble des nombres du troisième tableau est le même que celui du premier tableau.

Exercice 15

Trouvez tous les triplets (x, y, z) de rationnels vérifiant l'équation $x^2+y^2+z^2+x+y+z=1$

Exercice 16

Montrer que la somme des chiffres de 2^n (avec $n \in \mathbb{N}$) dans le système décimal peut être rendue arbitrairement grande.

Exercice 17

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{N}$, qui à n associe la somme de ses chiffres en base 10. Calculer $f\left(f\left(f\left(4444^{4444}\right)\right)\right)$.

Exercice 18

Trouver un polynôme à deux variables P tel que l'ensemble des valeurs prises par $P(x, y)$ lorsque x et y parcourent les nombres réels soit exactement les nombres réels strictement positifs.

Exercice 19

Montrer que dans un polyèdre quelconque, il y a toujours deux faces ayant le même nombre de côtés.

Exercice 20

On suppose que les entiers non nuls $a_1, a_2, \ldots, a_n$ satisfont à l'équation

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{x}}}} = x$$

pour toute valeur de x pour laquelle le membre de gauche a un sens. Montrer que l'entier n est pair. Quel est le plus petit n tel que de tels nombres existent ?

Exercice 21

Au début, l'urne contient 200 boules blanches et 100 boules noires et c'est Pierre qui a toutes les allumettes, et il en a vraiment beaucoup, à volonté quoi. Pierre en mise en certain nombre et Nicolas retire une boule de l'urne. Si elle est blanche, il recupère les allumettes que Pierre a misées. Si elle est noire, Pierre récupère sa mise et prend à Nicolas le même nombre qu'il avait misés. Si Nicolas n'a pas assez d'allumettes pour le satisfaire, Pierre est déclaré vainqueur. Sinon, on continue... Si Nicolas arrive à retirer ainsi toutes les boules de l'urne, il gagne. Montrer que Pierre a une stratégie pour gagner la partie. Montrer que ce n'est plus le cas si Pierre est tenu de miser moins de 1500 allumettes par coup.

Exercice 22

Existe-t-il une suite infinie d'entiers, telle que la somme de 10 termes successifs soit toujours strictement positive, alors que la somme des $10n+1$ premiers termes soit strictement négative pout tout n ? Même question avec une suite infinie de réels.