Formule d'Euler-Poincaré, graphes et polyèdres

Dans la suite certaines démonstrations seront volontairement un peu rapides. Pour vérifier que vous avez compris, n'hésitez pas à essayer de trouver les étapes qui manquent.

1 Graphes

1.1 Définition

On définit un **graphe** de la façon suivante : on se donne un certain nombre (fini) de points du plan, qui seront les **sommets** du graphe. Ensuite on relie certains sommets par une ligne, qui s'appelle une **arête**. Les sommets reliés par une arête sont les **extrémités** de cette arête. On ne peut pas tracer les arêtes n'importe comment : on impose que deux arêtes ne se croisent pas, qu'une arête ne se croise pas elle-même, qu'une arête ne recontre pas d'autre sommet que ses extrémités. (En fait la définition d'un graphe est plus générale : on peut autoriser des croisements d'arêtes. Les graphes vérifiant la condition de non-croisement que nous avons imposée sont dits **graphes planaires**, mais comme nous ne considérerons que ceux-là nous dirons simplement graphe.)

Une fois tracé sur le plan, le graphe découpe le plan en différentes zones : on dit que deux points du plan sont dans la même zone s'ils ne sont pas sur le graphe (autrement dit, ce ne sont pas des sommets et ils ne sont pas sur une arête), et

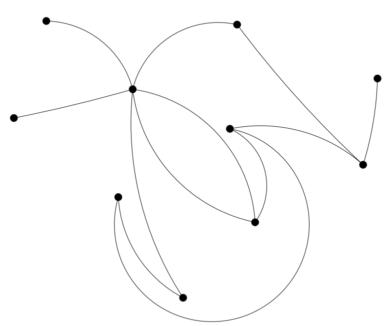

Fig. 1: Un graphe

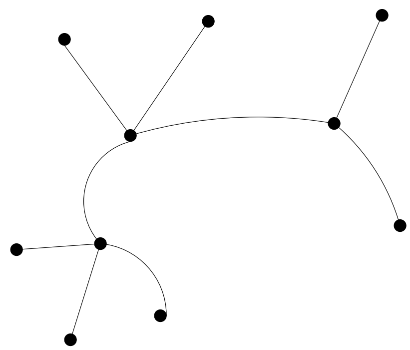

FIG. 2: Un arbre

qu'on peut aller de l'un à l'autre sans rencontrer le graphe. On appelle **faces** les différentes zones délimitées par le graphe (pourquoi ce nom ? voir la deuxième partie...). Un graphe délimite une et une seule face non bornée, et éventuellement une ou plusieurs faces bornées.

On appelle **bord** de la face l'ensemble des sommets et des arêtes du graphe qui sont en contact avec cette face.

1.2 Quelques types particuliers de graphes

On dit qu'un graphe est **connexe** si on peut passer d'un sommet quelconque du graphe à un autre en se déplaçant le long des arêtes du graphe.

Une **boucle** dans un arbre est une suite de sommets distincts du graphe tels que le premier sommet est relié au deuxième, le deuxième au troisième,..., l'avant-dernier au dernier et le dernier au premier. (une boucle passe par au moins 3 sommets, voyez-vous pourquoi ?)

Observons que le bord d'une face bornée constitue une boucle (voyez-vous pourquoi ?).

Un **arbre** est un graphe connexe qui ne contient pas de boucle. Une autre façon de définir un arbre est de dire qu'il ne délimite pas de face bornée.

1.3 La caractéristique d'Euler-Poincaré

Notons S le nombre de sommets de notre graphe, A son nombre d'arêtes, et F le nombre de faces qu'il délimite. On définit alors sa **caractéristique d'Euler-Poincaré** χ (prononcer "khi") par la formule :

$$\chi = S - A + F$$

On a alors la propriété importante suivante : la caractéristique d'Euler-Poincaré d'un graphe connexe est égale à 2.

Démonstration :
Regardons tout d'abord un cas particulier extrêment simple : le graphe qui a un seul sommet, et pas d'arête, qu'on appelle le **graphe trivial**. Il ne délimite évidemment qu'une seule face, on a donc $S = 1$, $A = 0$, $F = 1$, et on trouve donc bien $\chi = 2$.

Considérons maintenant un graphe connexe quelconque. Nous allons montrer qu'on peut diminuer petit à petit son nombre d'arêtes et/ou de sommets, jusqu'à obtenir le graphe trivial, et de façon à ce qu'à chaque étape le graphe reste connexe, et que la caractéristique d'Euler-Poincaré reste inchangée. Alors la caractéristique d'Euler-Poincaré du graphe de départ sera égale à celle du graphe d'arrivée, dont on a vu qu'elle était égale à 2.

On va d'abord supprimer petit à petit des arêtes jusqu'à obtenir un arbre. Supposons donc que notre graphe n'est pas un arbre. Il délimite donc une face non bornée, dont le bord est formé d'une boucle. Alors on peut supprimer une des arêtes de cette boucle. Le graphe reste en effet connexe : si un chemin reliant deux sommets du graphe passait par cette arête, on peut le remplacer par un chemin qui parcourt l'autre partie de la boucle. Ensuite, χ reste inchangée : on n'a pas changé le nombre S de sommets, on a diminué d'1 le nombre A d'arêtes, et on a aussi diminué d'1 le nombre F de faces car l'arête qu'on a ôtée séparait deux faces différentes.

Ainsi, chaque fois qu'on a un graphe qui n'est pas un arbre, on peut lui ôter une arête. À force d'ôter des arêtes, on finit par arriver à un graphe qui est un arbre.

Dans un arbre qui n'est pas le graphe trivial, il y a au moins un sommet qui est l'extrémité d'exactement une arête. Supposons en effet que ce ne soit pas vrai : chaque sommet est alors l'extrémité d'au moins deux arêtes. Je choisis un sommet du graphe, et je me balade sur le graphe le long des arêtes, avec la condition que je ne reprendrai jamais une arête sur laquelle je suis déjà passé, jusqu'à ce que je ne puisse plus continuer. Alors quand je m'arrêterai, ce sera sur un sommet par lequel je suis déjà passé (puisque les autres arêtes ayant ce sommet pour extrémité auront déjà été empruntées), et mon chemin entre le passage précédent et celui-ci contient une boucle.

Maintenant, si dans mon graphe j'ai un sommet qui est l'extrémité d'exactement une arête, je peux retirer simultanément arête et sommet. Alors S diminue d'1, A aussi, et F ne change pas, donc χ ne change pas ; et le graphe reste connexe.

Ainsi, quand on a un arbre, on peut retirer étape par étape une arête et un sommet au graphe, jusqu'à obtenir le graphe trivial. Et à ce moment-là nous sommes au terme de la démonstration.

Il est conseillé de dessiner un graphe, et d'effectuer les étapes sur ce graphe pour voir comment ça marche.

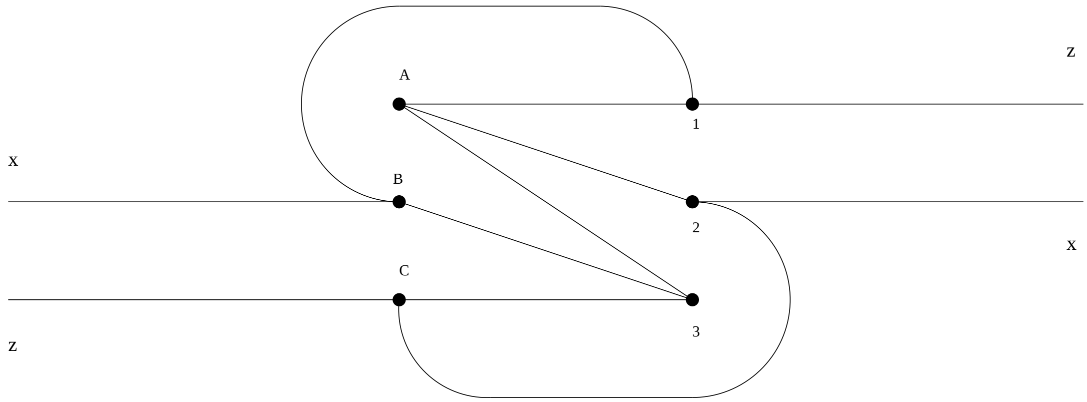

FIG. 3: Une solution au problème

1.4 Une application : les 3 maisons

Le problème Dans une campagne reculée, il y a trois maisons, et trois usines : une centrale électrique, une usine de production de gaz, et un centre de distribution d'eau. On veut relier chaque maison à chacune des usines, avec la contrainte que les tuyaux ou fils électriques doivent être posés sur le sol, ne peuvent avoir d'embranchement, ni se croiser. Peut-on y arriver ?

Une réponse Grâce à la caractéristique d'Euler-Poincaré, on peut démontrer que le problème précédent n'a pas de solution. En effet, supposons qu'il existe une solution. On considère le graphe dont les sommets sont les maisons et les usines, et les arêtes sont les tuyaux et les fils électriques. Il reste alors à compter le nombre de faces du graphe. Faites-le de deux façons différentes (l'une d'entre elles pouvant être l'application de la formule précédente), et observez que l'on obtient deux résultats différents. En déduire qu'il y a une contradiction, et que notre supposition qu'il existait une solution est donc fausse.

Une solution ? Sur le dessin, les chiffres 1, 2, 3 représentent les maisons, les lettres A, B, C les usines, et les traits les tuyaux et fils. Recopier ceci sur une bande de papier, des deux côtés de la feuille (comme si l'encre traversait le papier). Recoller ensuite les deux extrémités de la bande de papier de sorte que les lettres x et z se correspondent. Observer le résultat. Qu'en pensez-vous ? (On appelle **ruban de Moebius** la forme donnée à la bande de papier).

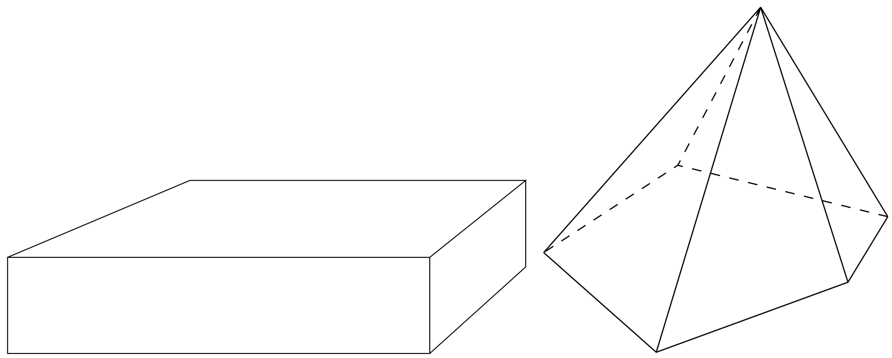

FIG. 4: Des polyèdres

2 Polyèdres

2.1 Définitions

Un **polyèdre** est un solide dont le bord est formé de polygones. On appelle **faces** du polyèdre les différents polygones qui en constituent le bord, **arêtes** du polyèdre les côtés des polygones, et **sommets** du polyèdre les sommets des polygones.

Exemples de polyèdres : un pavé, une pyramide...

Attention, le fait de dire que le bord est formé de polygones exclut certaines formes pour les faces : en particulier, elles n'ont pas de "trou".

Un polyèdre est dit **convexe** si, chaque fois que l'on prend deux points dans ce polyèdre, le segment qui les relie est entièrement contenu dans le polyèdre.

2.2 La caractéristique d'Euler-Poincaré

On définit cette caractéristique de la même façon que pour les graphes :

$$\chi = S - A + F$$

où S est le nombre de sommets du polyèdre, A le nombre d'arêtes, et F le nombre de faces.

On a alors la propriété suivante : la caractéristique d'Euler-Poincaré d'un polyèdre convexe est égale à 2.

Démonstration :

Prenons notre polyèdre convexe, et supposons qu'il est creux, et avec des faces en caoutchouc très déformable (comme un ballon). Perçons un petit trou dans une des faces. En tirant sur les bords du trou, on peut aplatir la surface du polyèdre jusqu'à la poser sur un plan. Alors l'ensemble des sommets et des arêtes du polyèdre dessinent un graphe connexe, et le graphe obtenu a le même nombre

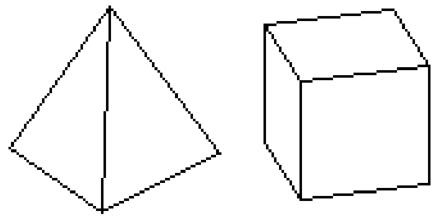

FIG. 5: Un tétraèdre et un cube

d'arêtes, de sommets et de faces que le polyèdre (la face qu'on a percée devenant la face non bornée du graphe). Il ne reste plus qu'à appliquer la formule que l'on a démontrée sur la caractéristique d'Euler-Poincaré des graphes connexes.

2.3 Polyèdres réguliers

Un polyèdre est dit **régulier** si toutes ses faces sont des polygones réguliers, ayant le même nombre de côtés, que de chaque sommet part le même nombre d'arêtes, que toutes les arêtes ont même longueur. (La définition apporte un peu trop de précisions, on pourrait en enlever un bout et démontrer que ce qu'on a enlevé est en fait conséquence de ce qu'on a laissé).

Vérifier que si on connaît le nombre de sommets, d'arêtes, de faces d'un polyèdre régulier, on peut déterminer combien de côtés ont ses faces, et combien d'arêtes partent de chaque sommet, et en déduire que le polyèdre est alors bien déterminé.

Chercher quelques exemples de polyèdres réguliers.

On trouve facilement le cube, et le tétraèdre régulier (4 sommets, 4 faces qui sont des triangles équilatéraux).

Quand on a un polyèdre régulier, on a une formule qui nous permet d'en construire un autre. Marquons le centre de chaque face (comment définit-on le centre d'un polygone régulier ?). Ensuite relions deux de ces points marqués s'ils appartiennent à des faces adjacentes, c'est-à-dire ayant une arête en commun. "Remplissons" alors le solide, on obtient un polyèdre, et lui aussi est régulier. On l'appelle **dual** du solide de départ.

Si on applique cette procédure au tétraèdre régulier, on obtient un autre tétraèdre régulier. Si on applique cette procédure au cube, on obtient un octaèdre régulier : 8 faces qui sont des triangles équilatéraux, 6 sommets, 12 arêtes.

Comparer le nombre de sommets, d'arêtes, de faces d'un polyèdre régulier à ceux de son dual. En déduire que le dual du dual d'un polyèdre est de même type que le polyèdre de départ. Comparer aussi le nombre de côtés d'une face d'un polyèdre au nombre d'arêtes partant d'un sommet de son dual.

Nous avons déjà parlé de 3 polyèdres réguliers, mais il y en a d'autres : en effet, on peut démontrer qu'il existe exactement cinq type de polyèdres réguliers.

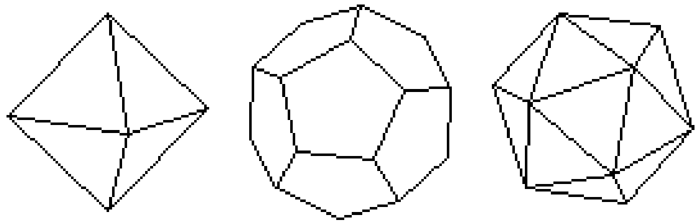

FIG. 6: Octaèdre, dodécaèdre et icosaèdre réguliers

Il faut rajouter à la liste le dodécaèdre, qui a 12 faces pentagonales, et l'icosaèdre, qui a 20 faces triangulaires ("dodéca" veut dire "douze" en grec, et "icosa" signifie "vingt"). Ces deux polyèdres sont dual l'un de l'autre.

Montrons qu'il ne peut y en avoir d'autre. Appelons n le nombre de côtés des polygones formant les faces, et p le nombre de faces qui touchent un sommet donné du polyèdre. Alors $n \geq 3$ (un polygone a au moins 3 côtés...), et $p \geq 3$ aussi. Un polyèdre régulier est entièrement déterminé par ces données. (Quelle est la relation entre nombre de côté des polygone et nombre de polygones adjacents à un sommet pour un polyèdre régulier et pour son dual ?)

Un polygone régulier à n côtés a des angles valant $(n-2)\pi/n$. La somme des angles en un sommet donné est strictement inférieure à 2π, on a donc : $p(n-2)\pi/n < 2\pi$, soit $(p-2)(n-2) < 4$. Les couples (p, n) d'entiers vérifiant cette équation sont $(3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (5,3)$, qui correspondent respectivement au tétraèdre, au cube, à au dodécaèdre, à l'octaèdre, et à l'icosaèdre.

2.4 Quelques polyèdres non convexes

Quand les polyèdres ne sont plus convexes, la proposition que nous avons énoncées sur la caractéristique d'Euler n'est plus nécessairement valable. Faire le calcul sur les différents polyèdres dessinés, et sur d'autres exemples de votre choix (attention ! en dessinant vos polyèdres, n'oubliez pas que les faces doivent être des polygones sans trous).

On peut prévoir la caractéristique d'Euler du polyèdre sans faire le calcul. En effet, un théorème est que χ s'écrit sous la forme $2-2g$, où g est un entier positif qu'on appelle **genre** du polyèdre, et qui représente le nombre de "trous" qu'il y a dedans. Un polyèdre convexe n'ayant pas de trous, on retrouve bien $\chi = 2$.

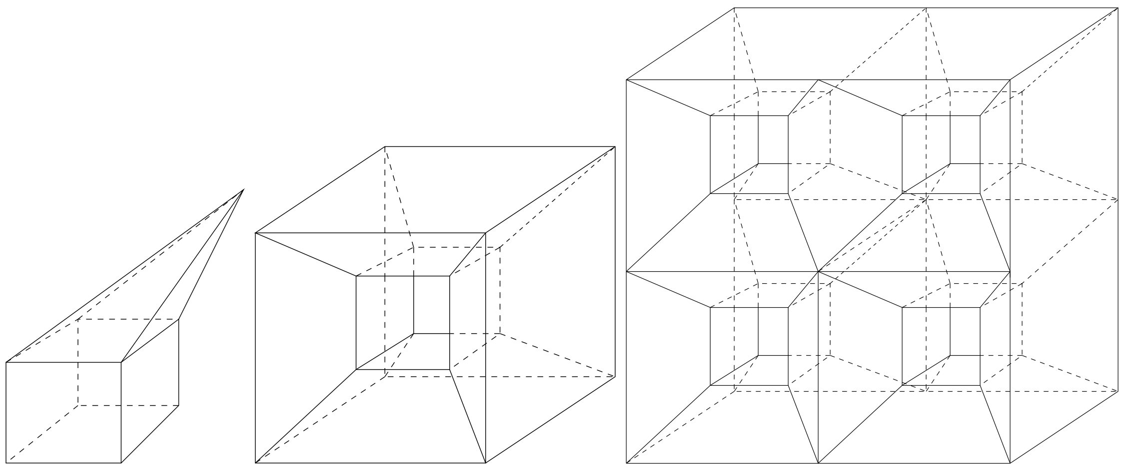

FIG. 7: Des polyèdres non convexes

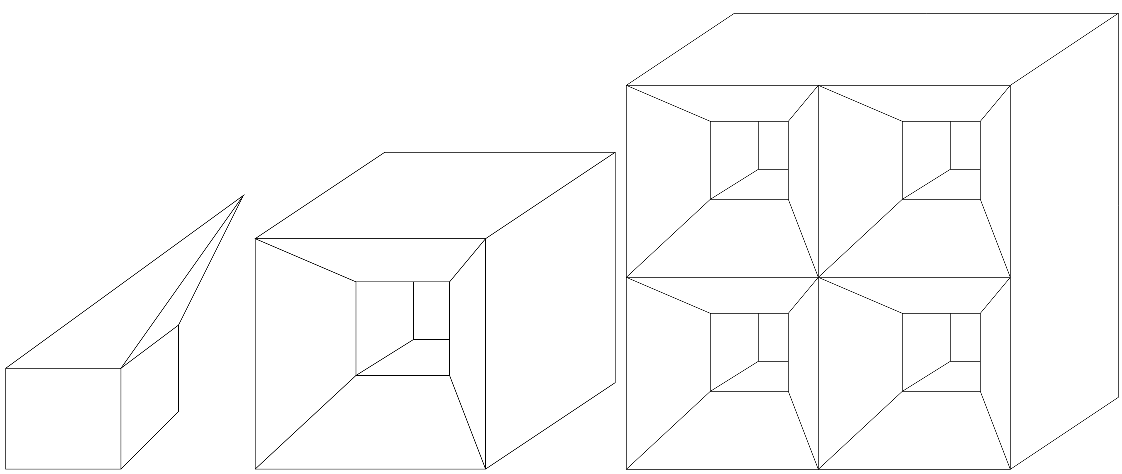

FIG. 8: Les mêmes sans les arêtes cachées