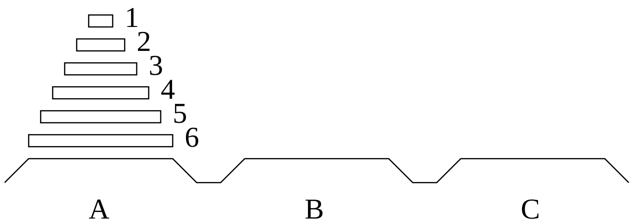
# Tour de Hanoï
# et
# Courbe du Dragon

La tour de Hanoï est un jeu pour une personne. Il est constitué de $n$ disques numérotés de 1 à $n$ et de trois emplacements ($A$, $B$ et $C$) pour les disques. La taille des disques augmente avec leur numéro. Ou départ les disques sont posés les uns sur les autres, dans l'ordre, du plus petit en haut jusqu'au plus grand en bas. Cette tour se trouve sur l'un des trois emplacements. Le but du jeu est de déplacer la tour sur un autre emplacement en déplaçant les disques un par un. Chaque disque peut être posé soit sur un emplacement, soit sur disque plus grand, mais pas sur un disque plus petit.




Exemple : soit $n = 2$. Pour déplacer la tour de 2 disques de l'emplacement $A$ à l'emplacement $B$, on met d'abord le disque 1 sur l'emplacement $C$, puis le disque 2 sur l'emplacement $B$, puis le disque 1 sur le disque 2.

**Exercice 1.** Trouver la façon la plus rapide de déplacer la tour de Hanoï d'un emplacement à un autre pour $n = 3, 4$.

**Exercice 2.** Montrer qu'il existe une unique façon de déplacer une tour de $n$ disques de l'emplacement $A$ à l'emplacement $B$ en $2^n - 1$ coups.

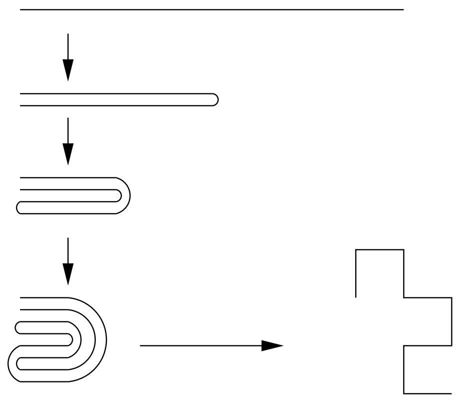
Effectuons le déplacement de la tour comme dans l'exercice 2 en notant au fur et à mesure les numéros des disques déplacés. Nous noterons $H_n$ la suite des numéros obtenus. Ainsi $H_n$ est une suite de $2^n - 1$ nombres compris entre 1 et $n$.

**Exercice 3.** Montrer qu'on peut obtenir la suite $H_{n+1}$ à partir de la suite $H_n$ de deux façons différentes suivantes.

a) En écrivant la suite $H_n$, puis le nombre $n+1$, puis de nouveau la suite $H_n$.

b) En ajoutant 1 à tous les éléments de la suite $H_n$, puis en intercalant le nombre 1 entre tous les éléments de la suite obtenue (y compris au début et à la fin de la suite).

La courbe du dragon est la courbe obtenu par le procédé suivant. On prend un long ruban en papier. On le plie en deux en amenant son bout droit vers son bout gauche par en bas. Ensuite on plie de nouveau le ruban obtenu, toujours en amenant son bout droit vers son bout gauche par en bas. On répète cette opération $n$ fois. Ensuite on déplie le ruban à moitié, de telle sorte que tous les plis fassent des angles droits, et on le pose sur la table. En regardant le résultat d'en haut on verra la $n$ème courbe du dragon.



Le dessin ci-dessus montre la 3ème courbe du dragon ($n = 3$).

**Exercice 4.** Dessinez la 4ème et la 5ème courbe du dragon.

Supposons qu'une fourmi suit la $n$ème courbe du dragon en notant au fur et à mesure tous les tournants : la lettre $d$ signifie que la courbe tourne à droite et la lettre $g$ qu'elle tourne à gauche. La fourmi obtient donc une suite de $2^n - 1$ lettres $d$ et $g$. Notons cette suite $D_n$. Par exemple, comme on peut voir sur le dessin, $D_3 = ddnddnn$.

**Exercice 5.** Montrer qu'on peut obtenir la suite $D_{n+1}$ à partir de la suite $D_n$ de deux façons différentes.

a) En écrivant $D_n$, puis la lettre $d$, puis de nouveau $D_n$, mais cette fois en commençant par la fin et en remplaçant les $d$ par de $g$ et inversement.

b) En intercalant entre les lettres de la suite $D_n$ les lettres $d$ et $g$ en alternance (d'abord $d$, puis la première lettre de $D_n$, puis $g$, puis la 2ème lettre de $D_n$, puis $d$, etc.).

**Exercice 6.** Montrer qu'une courbe du dragon ne se traverse pas elle-même et ne repasse pas deux fois par la même arête (même si elle peut repasser deux fois par le même sommet).

**Exercice 7.** Montrer qu'on peut obtenir la suite $D_n$ à partir de la suite $H_n$ de la manière suivante. En lisant la suite $H_n$, on y voit chaque nombre plusieurs fois. Quand un nombre apparaît pour la $k$ème fois dans la suite $H_n$, l'élément correspondant de la suite $D_n$ est $g$ ou $d$ selon que $k$ est pair ou impair.

**Exercice 8.** Sur une feuille de papier quadrillé infini on dessine quatre courbes du dragon issues d'un même point. Montrer qu'elles couvriront toutes les arêtes du quadrillage sans qu'aucune arête ne soit couverte deux fois.