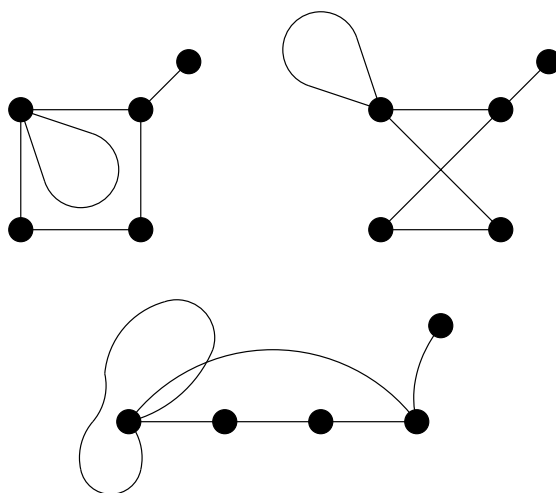


# Coloriage de graphes

**Définition.** Un *graphe* est un ensemble fini de points reliés par des lignes. Les points s'appellent des *sommets* et les lignes des *arêtes*. Une arête peut soit relier deux sommets distincts, soit être une *boucle* allant d'un sommet à lui-même. Si plusieurs arêtes relient le même couple de sommets, on les appellent des *arêtes multiples*. Deux sommets sont *adjacents* s'ils sont reliés par une arête. Un graphe est *connexe* si l'on peut passer de n'importe quel sommet à n'importe quel autre en suivant les arêtes.

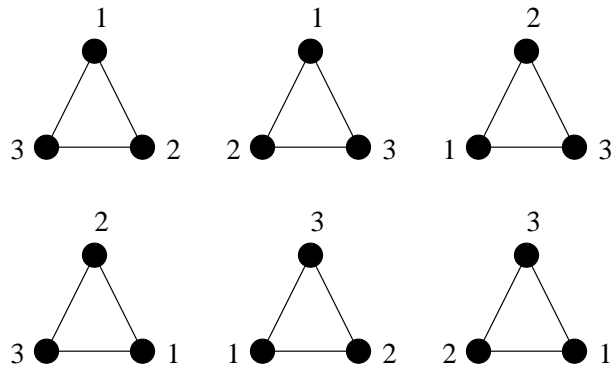
En général on dessine les graphes sur le plan, en essayant, si c'est possible, de faire en sorte que les arêtes ne se coupent pas. Cependant, il faut comprendre qu'un graphe en soi ne nous dit pas de quelle manière il faut le dessiner sur le plan. Le même graphe peut être dessiné de beaucoup de manières différentes. Par exemple, les trois figures ci-dessous représentent le même graphe.



Dans la suite nous allons considérer uniquement les graphes qui n'ont pas de boucles ni d'arêtes multiples.

**Définition.** Un *coloriage* d'un graphe en  $n$  couleurs est une façon d'associer une couleur à chaque sommet, de telle sorte que deux sommets adjacents sont toujours de couleurs différentes. On n'est pas obligé d'utiliser toutes les couleurs.

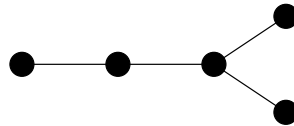
Par exemple, il y a 6 façons de colorier un triangle en 3 couleurs. Ces coloriage sont représentés ci-dessous.



**Exercice 1.** Combien y a-t-il de façons de colorier le triangle en 4 couleurs?

**Exercice 2.** Montrer qu'il existe un graphe qui ne possède aucun coloriage en 100 couleurs.

**Exercice 3.** Combien de coloriage en  $n$  couleurs possède le graphe suivant?



Nous allons maintenant introduire la notion du polynôme chromatique d'un graphe.

**Théorème-définition.** Soit un graphe  $G$  sans boucles ni arêtes multiples. Le nombre de coloriage de  $G$  en  $n$  couleurs est un polynôme à coefficients entiers<sup>1</sup> en  $n$ . Ce polynôme s'appelle le *polynôme chromatique* du graphe.

**Démonstration.** Appelons la taille du graphe  $G$  la somme du nombre de sommets et du nombre d'arêtes de  $G$ . Nous allons faire une démonstration par récurrence sur la taille du graphe  $G$ .

---

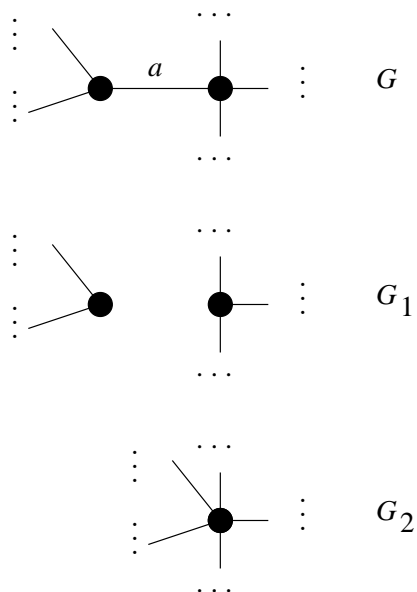
1. Un polynôme en  $n$  à coefficients entier est une expression de la forme  $a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \dots + a_0$ , où les  $a_i$  sont des entiers.

Si la taille de  $G$  vaut 1, alors  $G$  est le graphe qui n'a qu'un sommet et aucune arête. Le nombre de façons de le colorier en  $n$  couleurs est égal à  $n$  (il faut choisir la couleur pour l'unique sommet). C'est bien un polynôme en  $n$  à coefficients entiers.

Considérons maintenant un graphe quelconque  $G$  et supposons que le théorème est vrai pour tous les graphes de taille plus petite que  $G$ . Montrons qu'il est alors aussi vrai pour  $G$ .

Supposons d'abord que  $G$  a  $s$  sommets et aucune arête. (Le nombre  $s$  est alors la taille de  $G$ .) Le nombre de façons de colorier  $G$  en  $n$  couleurs vaut alors  $n^s$ , car on peut choisir les couleurs indépendamment pour tous les sommets. Comme  $n^s$  est un polynôme en  $n$  à coefficients entiers, on voit que le théorème est vrai.

Supposons maintenant que  $G$  possède au moins une arête  $a$ . Notons  $G_1$  le graphe obtenu de  $G$  en effaçant l'arête  $a$ . Notons, par ailleurs,  $G_2$  le graphe obtenu de  $G$  en contractant l'arête  $a$ .



Si, lors de la contraction, il apparaît des arêtes multiples reliant un certain couple de sommets  $s_1, s_2$ , nous remplaçons ces arêtes par une unique arête reliant  $s_1$  et  $s_2$ . Il est facile à voir que lors de la contraction il n'apparaît pas de boucles.

Notons que les graphes  $G_1$  et  $G_2$  ont tous les deux une taille strictement plus petite que  $G$ . Appelons  $P(n)$ ,  $P_1(n)$  et  $P_2(n)$  les nombres de coloriages

de  $G$ ,  $G_1$  et  $G_2$  en  $n$  couleurs. Par hypothèse de récurrence,  $P_1$  et  $P_2$  sont des polynômes à coefficients entiers. Nous allons prouver que  $P(n) = P_1(n) - P_2(n)$ , ce qui voudra dire que c'est également un polynôme à coefficients entiers.

Notons  $s_1$  et  $s_2$  les deux sommets qui sont reliés par l'arête  $a$  dans  $G$ . Pour prouver que  $P(n) = P_1(n) - P_2(n)$ , considérons n'importe quel coloriage du graphe  $G_1$ . Il y a deux possibilités. Soit les sommets  $s_1$  et  $s_2$  sont de couleurs différentes. Dans ce cas, le coloriage peut être transporté tel quel sur le graphe  $G$ . Soit les sommets  $s_1$  et  $s_2$  sont de la même couleur. Dans ce cas, on peut coller ensemble ces deux sommets et obtenir un coloriage du graphe  $G_2$ . Ainsi nous voyons que chaque coloriage de  $G_1$  correspond soit à un coloriage de  $G$ , soit à un coloriage de  $G_2$ . Donc  $P_1 = P + P_2$ , d'où  $P = P_1 - P_2$ . Ainsi  $P$  est bien un polynôme à coefficients entiers.

Fin de démonstration.

**Exercice 4.** Trouver le polynôme chromatique pour le graphe du carré.

**Exercice 5.** Soit

$$P(n) = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \dots + a_0$$

le polynôme chromatique d'un graphe  $G$ . Combien valent:

Le degré de  $d$  de  $P$ ?

Le coefficient dominant  $a_d$ ?

Le coefficient sous-dominant  $a_{d-1}$ ?

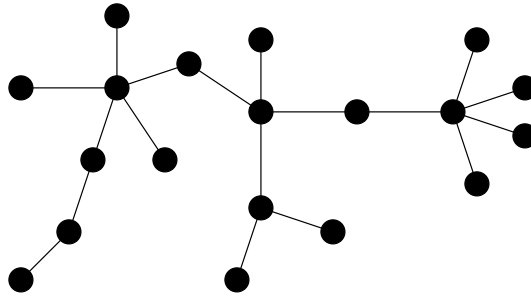
Le terme constant  $a_0$ ?

La somme des coefficients  $a_0 + \dots + a_p$ ?

Nous allons maintenant changer un peu de sujets et parler des arbres à sommets numérotés.

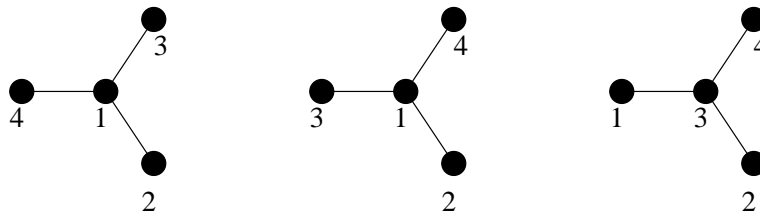
**Définition.** Un *cycle* dans un graphe est un chemin qui mène d'un sommet à lui-même en suivant des arêtes et sans passer deux fois par la même arête. Un *arbre* est un graphe connexe sans cycles. Un arbre à  $n$  sommets numérotés est, comme son nom l'indique, un arbre avec  $n$  sommets numérotés de 1 à  $n$ . Si d'un sommet ne sort qu'une seule arête, le sommet s'appelle une *feuille*.

Voici un exemple d'arbre.



Il est facile à voir qu'un arbre à  $n$  sommets possède nécessairement  $n - 1$  arêtes.

Deux arbres à  $n$  sommets numérotés sont égaux lorsque les numéros des sommets reliés par des arêtes sont les mêmes dans les deux arbres. De nouveau, le même arbre peut être dessiné sur le plan de plusieurs manières. Sur le dessin si-dessous, les deux premiers arbres sont les mêmes, mais le troisième est différent.



**Théorème de Cayley.** Il y a  $n^{n-2}$  arbres à  $n$  sommets numérotés.

**Démonstration.** Nous allons établir une correspondance biunivoque entre les arbres à  $n$  sommets numérotés et les suites de  $n - 2$  nombres entre 1 et  $n$ .

Montrons d'abord comment associer une telle suite à un arbre. Prenons la feuille de l'arbre qui a le numéro le plus petit et notons le numéro du sommet auquel elle est attachée. Ensuite nous effaçons la feuille et l'arête qui en sortait en continuons la même opération. À la fin nous obtenons un arbre qui n'a que 2 sommets, dont un porte nécessairement le numéro  $n$ . Nous nous arrêtons à ce moment. Ainsi, nous avons obtenu une suite de  $n - 2$  numéros de sommets.

Montrons maintenant comment reconstruire un arbre à  $n$  sommets numérotés à partir de n'importe quelle suite de  $n - 2$  nombres compris entre 1

et  $n$ . Notons d'abord que la suite de nombres permet de déterminer combien d'arêtes sortent de chaque sommet : à savoir, si le numéro d'un sommet apparaît  $k$  fois dans la suite, de ce sommet sortent  $k + 1$  arêtes. Nous commençons donc par faire une liste des sommets de 1 à  $n$  en notant en face de chaque sommet le nombre d'arêtes qui en sortent. Nous allons utiliser la suite et la liste des sommets pour fabriquer l'arbre. On prend d'abord la feuille qui a le numéro le plus petit  $i$  (on peut la choisir d'après la liste des sommets), et on la relie au sommet  $j$  qui est le premier dans la suite. Ensuite on efface le premier terme  $j$  de la suite et la feuille  $i$  dans la liste. De plus, dans la liste on enlève 1 au nombre d'arêtes qui sortent de  $j$ , car une de ces arêtes est déjà tracée. Nous continuons ces mêmes opérations jusqu'à ce que la suite soit complètement épuisée. Il reste alors dans la liste exactement deux sommets, dont un est nécessairement le  $n$ ème. De chacun de ces deux sommets doit sortir encore une arête non tracée. Nous terminons donc en traçant l'arête qui relie ces deux sommets.

Nous obtenons ainsi  $n$  sommets reliés par  $n - 1$  arêtes. Il est facile à voir que les arêtes forment bien un arbre, car elles ne peuvent pas former de cycles. En effet, chaque fois que nous relions deux sommets par une arête, nous effaçons un des deux sommets de la liste. Ce sommet ne sera donc plus relié à rien. Il est évident qu'on ne peut pas obtenir de cycles en procédant ainsi.

Ainsi nous avons décrit comment associer un arbre à  $n$  sommets numérotés à une suite de  $n - 2$  numéros entre 1 et  $n$  et, inversement, comment associer une telle suite à un arbre. Il est évident d'après la construction que les deux opérations sont inverses l'une de l'autre. Donc il y a autant d'arbres que de suites, soit  $n^{n-2}$ .

**Exercice 6.** Combien y a-t-il d'arbres à  $n - 1$  arêtes numérotées?